Tentamen Discrete Structuren

donderdag 17 augustus 2006, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is.

Er is **geen** vrijstelling op grond van toetsresultaten.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Een propositionele formule is in *conjunctieve normaalvorm* als het een conjunctie van 1 of meer disjuncties van 1 of meer (negaties van) propositionele variabelen is. Voorbeelden staan in het tweede deel van deze opgave.

   (a) Zet $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$ *via een geannoteerd lineair bewijs* om in een conjunctieve normaalvorm.

   (b) Bekijk de volgende conjunctieve normaalvormen:

   $$p \wedge (q \vee r \vee \neg q)$$
   $$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)$$
   $$(p \vee \neg q) \wedge q$$
   $$(p \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge q$$

   Elk van deze conjunctieve normaalvormen kan vereenvoudigd worden, dwz. vervangen worden door een logisch equivalente conjunctieve normaalvorm die korter is. Laat dit zien, en vergeet de argumentatie niet.

2. De volgende uitspraken lijken op de definitie van invariant en de stelling over loop-invarianten, maar ze kloppen niet. Leg uit waarom niet, en verbeter ze zodat de correcte versie ontstaat.

   (a) 'propositie p is invariant van de loop **while** g **do** S' is gedefinieerd door

   als g waar is, dan is p waar zowel voor als na uitvoering van S.

   (b) Als p invariant is van de loop **while** g **do** S, dan termineert de loop en geldt na afloop $p \wedge \neg g$.

3. (a) Geef een expliciete formule voor de getallen s_n van de rij van Fibonacci, gegeven door

   $$s_0 = 0$$
   $$s_1 = 1$$
   $$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \quad \text{voor } n \geq 2$$

   (b) Laat zien dat $s_n = O(2^n)$. Leg daarbij eerst uit wat $s_n = O(2^n)$ betekent.

Z.O.Z.

4. (a) Geef definities van de begrippen *boom* (tree) en *opspannende boom* (spanning tree).
   (b) Bewijs dat elke eindige samenhangende graaf G een opspannende boom heeft. (Aanwijzing: beschouw een minimale samenhangende deelgraaf van G.)

5. $(X, \leq)$ is een partieel geordende verzameling, met $x, y, z \in X$. Geef definities (in logische notatie) van de volgende begrippen.
   (a) x is maximaal element in X.
   (b) x is het grootste element van X.
   (c) x is bovengrens van y en z.
   (d) x is kleinste bovengrens van y en z.

6. (a) Wanneer zijn twee verzamelingen even groot?
   (b) Wanneer is een verzameling aftelbaar oneindig?
   (c) Laat zien dat $N \times \{0, 1\}$ aftelbaar oneindig is.